POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ

1. Czterej brytyjscy gentlemani (Adam, Bill, Chuck, oraz Dan) umówili się na spotkanie w ekskluzywnym klubie. Zostawili swoje rzeczy w szatni – każdy zostawił cztery części stroju: płaszcz, kapelusz, rękawiczki oraz laseczkę (każdy zostawił po jednej sztuce każdego z elementów – przy czym parę rękawiczek traktujemy jako jeden element garderoby). Jednak gdy opuszczali klub okazało się, że każdy z nich miał dokładnie jeden element stroju każdego z kolegów. Adam i Bill wyszli z własnymi płaszczami, Chuck wyszedł z własnym kapeluszem zaś Dan z własnymi rękawiczkami. Adam nie miał laseczki Chucka. Podaj czyje elementy stroju miał każdy z kolegów po wyjściu z klubu.

2. Jacek napisał liczbę czterocyfrową i odjął od niej tę liczbę z odwróconą kolejnością cyfr. Otrzymał dodatnią liczbę trzycyfrową, w której liczba jedności była o 1 większa od liczby dziesiątek. Jaką liczbę otrzymał Jacek?

3. Uzasadnij, że ze wszystkich prostokątów o obwodzie 20 cm największe pole ma kwadrat.

4. W roku 2019 będą 53 wtorki. W którym roku będzie kolejna taka sytuacja?

5. Adam włożył do woreczka pewną liczbę kamyczków, Basia dołożyła o połowę więcej. Jacek wyjął z woreczka pewną liczbę kamyczków (ale nie więcej niż wcześniej włożył Adam). Antek dołożył tyle kamyczków, ile by było w woreczku, gdyby Basia nie wkładała swoich kamyczków. Następnie Marylka dołożyła kamyczki w liczbie dwa razy większej od tej, którą zabrał Jacek. Okazało się, że w woreczku jest 2016 kamyczków. Ile kamyczków dołożyła Basia?

6. Dla jakich wartości parametru m z odcinków o długościach $2m$, $m + 7$, $3m - 2$ można zbudować trójkąt równoramienny?

7. Ile jest liczb palindromicznych, w których zapisie nie występuje zero, a suma cyfr wynosi 7? (Liczba palindromiczna to liczba, która przy czytaniu z lewej strony do prawej i odwrotnie jest jednakowa, np. 3, 44, 56765.)

8. W prostokącie o wymiarach 5 m×12 m narysowano przekątną AC oraz wystawiono wysokość DE w trójkącie ACD. Oblicz długości boków trójkątów, na jakie te dwa odcinki podzieliły prostokąt.

9. Jacek skreślił jedną cyfrę trzycyfrowej liczby pierwszej i otrzymał 42. Jaką liczbę miał Jacek na początku?

10. Czy z trójkątów o bokach długości 7, 24, 25 można ułożyć kwadrat?

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jest tylko jedno rozwiązanie (w nawiasie podano kolejno właścicieli płaszcza, kapelusza, rękawiczek i laseczki): Adam (A, B, C, D), Bill (B, D, A, C), Chuck (D, C, B, A), Dan (C, A, D, B).

2. Jeżeli a, b, c, d są kolejnymi cyframi liczby Jacka, to otrzymał on liczbę $x = 999(a-d) + 90(b-c)$. Ponieważ $b - c \geqslant -9$, to $a - d = 1$ lub $a - d = 0$, bo x jest liczbą trzycyfrową. Gdyby $a - d = 0$, to liczba x kończyłaby się cyfrą 0 co jest niemożliwe. Stąd $a - d = 1$. Oczywiście liczba x kończy się cyfrą 9, zatem druga jej cyfra to 8. Wynika z tego, że $b - c = -9$, zatem $x = 189$. (Przykładowa liczba czterocyfrowa, od której mógł wystartować Jacek to 2091.)

3. Kwadrat o obwodzie 20 cm ma bok długości 5 cm i jego pole wynosi 25 cm^2. Jeśli prostokąt nie jest kwadratem, to jego boki wynoszą $5 + x$ cm oraz $5 - x$ cm, dla pewnej niezerowej liczby x (oczywiście mniejszej od 5). Pole takie prostokata jest równe $(5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$ cm^2, a skoro $x^2 > 0$, to jest mniejsze niż 25 cm^2.

4. Przypomnijmy, że rok kalendarzowy zwykły ma 365 dni, czyli 52 tygodnie i jeszcze jeden dzień. Zatem zaczyna się i kończy tego samego dnia tygodnia i dzień ten jest jedynym, który w danym roku powtórzy się 53 razy. Natomiast rok przestępny ma 52 tygodnie i jeszcze dwa dni, zatem aż dwa dni tygodnia powtórzą się 53 razy. Przy kolejnych latach podajemy dzień tygodnia rozpoczęcia i zakończenia: 2019 wt – wt, 2020 (przestępny) śr – czw, 2021 pt - pt, 2022 sob – sob, 2023 ndz – ndz, 2024 (przestępny) pon – wt. Zatem kolejnym rokiem, w którym będą 53 wtorki, będzie rok 2024.

5. Oznaczmy przez x liczbę kamyczków włożonych przez Adama, przez y liczbę kamyczków zabranych przez Jacka. Łatwo wywnioskować, że Basia dołożyła $1,5x$, Antek $x - y$, a Marylka $2y$ kamyczków. Zatem $3,5x = 2016$, skąd $x = 576$, czyli $1,5x = 864$, a tyle dołożyła kamyczków Basia.

6. Dla $m = 7$ oraz dla $m = 23/2$. Przyrównując pary liczb otrzymamy długości boków 14, 14, 19 dla $m = 7$; 4, 9, 4 dla $m = 2$ oraz 9, 23/2, 23/2 dla $m = 9/2$. Jednak dla $m = 2$ nie jest spełniona nierówność trójkąta.

7. Jest 8 takich liczb. Ponieważ w szukanych liczbach nie występuje zero, a suma cyfr wynosi 7, to liczba taka musi mieć nieparzystą liczbę cyfr (w dodatku środkowa cyfra musi być nieparzysta) a najdłuższa z nich może być siedmiocyfrowa. Rozpatrując kolejno liczby jedno-, trzy-, pięcio- i siedmiocyfrowe otrzymujemy: 7, 151, 232, 313, 11311, 12121, 21112, 1111111.

8. Obliczenia prowadzimy w metrach. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przekątna ma długość 13. Obliczając pole połowy prostokąta na dwa sposoby otrzymamy $5 \cdot 12 = 13 \cdot h$, gdzie h jest długością wystawionego odcinka. Niech $x < y$ będą długościami części przekątnej, na jakie dzieli ją h. Z podobieństwa rozważanych trójkątów mamy $x/5 = 5/13$, $y/12 = 12/13$, zatem $h = 60/13$, $x = 25/13$, $y = 144/13$. Boki rozważanych trójkątów wynoszą (według wielkości trójkątów od największego) $5, 12, 13$; $60/13, 144/13, 12$; $25/13, 60/13, 5$.

9. Jacek skreślił ostatnią cyfrę, bo dodanie cyfry do 42 na innym miejscu daje liczbę parzystą. Skreślona cyfra nie mogła być zerem ani podzielna przez 2, 3, 5, bo wyjściowa liczba byłaby także podzielna przez jedną z tych liczb. Pozostaje możliwość 1 lub 7, ale liczba 427 dzieli się przez 7. Sprawdzamy bezpośrednio, że 421 jest liczbą pierwszą i ona jest odpowiedzią.

10. Tak. Ponieważ $7^2+24^2=25^2$, to trójkąty te są prostokątne. Zatem dwa odpowiednio połączone dają prostokąt o wymiarach 7×24. Z takich prostokątów można ułożyć kwadrat o wymiarach $7 \cdot 24 \times 24 \cdot 7$.