

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

### RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Marcei policzył cukierki w kieszeni i zauważył, że  $\frac{5}{6}$  wszystkich cukierków plus półtora cukierka jest równe liczbie wszystkich cukierków. Ile cukierków Marcei ma w kieszeni?
2. Dodatnią liczbę całkowitą  $n$  zwiększono o 30%, a otrzymaną liczbę zmniejszono o 30% dostając liczbę naturalną  $k$ . Znajdź liczby  $n$  i  $k$ , jeżeli  $nk < 10000$ .
3. Marek pociął drut długości 280 cm na równe kawałki, których długość liczona w centymetrach była liczbą całkowitą. Ze wszystkich części zbudował szkielet ostrosłupa, którego podstawą był wielokąt foremny. Na ile części został pocięty drut?
4. Na straganie Pana Kapusty w czerwcu można było kupić truskawki i czereśnie. W lipcu cena truskawek wzrosła o 50%, a czereśni o 20% i wtedy za 2 kg czereśni trzeba było zapłacić tyle samo co za 3 kg truskawek. Oblicz, czy w czerwcu droższe były czereśnie, czy truskawki i o ile procent.
5. Dany jest zbiór pięciu punktów na płaszczyźnie. Ile prostych przechodzi przez co najmniej dwa punkty tego zbioru? Rozważ wszystkie przypadki.
6. Bok trójkąta i wysokość opuszczona na ten bok mają długości mniejsze od 1. Pokaż, że wszystkie wysokości tego trójkąta mają długość mniejszą od 1.
7. Waldek spojrział na zegar. Wskazówka godzinowa wskazywała dokładną minutę, zaś minutowa wskazywała minutę o 6 minut późniejszą. Jeszcze tego samego popołudnia Waldek ponownie zerknął na zegar – i znów godzinowa wskazówka wskazywała dokładną minutę, ale wtedy minutowa wskazówka wskazywała na minutę o 7 minut późniejszą. Ile czasu minęło między pierwszą a drugą obserwacją?
8. Znaleźć liczby naturalne, które zarówno po podzieleniu, jak i pomnożeniu przez 3 są dwucyfrowe.
9. O Dzielnym Krawczyku powiedzieli :  
Adam : On zabił więcej niż 7 much.  
Basia : On zabił co najmniej jedną muchę.  
Jacek : On zabił mniej niż 7 much.  
Antek : On zabił 6 lub 8 much.  
Ile much zabił Dzielny Krawczyk, jeżeli co najwyżej jedna z powyższych osób powiedziała prawdę?
10. Wilk chce wejść do domku siedmiu kozłat, zamkniętego zamkiem szyfrowym. Wiadomo, że szyfr składa się z siedmiu cyfr – samych dwójek i trójek. Wiadomo też, że dwójek jest więcej, a liczba oznaczająca szyfr dzieli się przez 3 i 4. Jaką liczbę wpisałby wilk, gdyby w swoim czasie uczył się matematyki?

**PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa**  
**RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Widzimy, że półtora cukierka stanowi  $\frac{1}{6}$  wszystkich cukierków. Stąd wszystkich cukierków jest  $6 \cdot 1,5 = 9$ .
2. Mamy  $k = 0,7 \cdot 1,3n$ , zatem  $91n = 100k$ . Wynika z tego, że  $n = 100x$ ,  $k = 91x$  dla pewnej liczby naturalnej  $x$ . Ponieważ  $10000 > nk = 9100x^2$ , to  $x = 1$ , zatem  $n = 100$ ,  $k = 91$ .
3. Jeżeli podstawą był  $n$ -kąt foremny, to krawędzi ostrosłupa (czyli też części drutu) było  $2n$ . Oczywiście  $n > 2$ . Należy uzasadnić, że  $n < 6$ . Np. w ten sposób, że dla  $n \geq 6$  kąt  $\angle AOB$  byłby mniejszy bądź równy od kąta  $\angle OAB$  (gdzie  $AB$  jest krawędzią podstawy, a  $O$  spodkiem wysokości ostrosłupa), czyli odcinek  $AB$  miałby długość mniejszą bądź równą od długości odcinka  $OA$ , więc tym bardziej od krawędzi bocznej.  
Jeżeli długość krawędzi wynosi  $d$  cm, to  $2 \cdot n \cdot d = 280$ , stąd  $n \neq 3$ . Liczby  $n = 4$  i  $n = 5$  spełniają warunki zadania, zatem Marek pociął drut na 8 lub 10 części.
4. Oznaczmy przez  $c$  i  $t$  odpowiednio ceny czereśni i truskawek w czerwcu. Ponieważ ich ceny w lipcu wyniosły odpowiednio  $1,2c$  i  $1,5t$ , to  $2 \cdot 1,2c = 3 \cdot 1,5t$ , zatem  $c = \frac{15}{8}t = 187,5\%t$ . Wynika z tego, że w czerwcu czereśnie były o 87,5% droższe od truskawek.
5. Zachodzi dokładnie jeden z poniższych przypadków.
  - a) Wszystkie punkty leżą na jednej prostej. Wtedy jest tylko jedna szukana prosta.
  - b) Cztery punkty leżą na jednej prostej, a piąty poza nią. Wtedy szukanych prostych jest 5.
  - c) Jeden z punktów jest przecięciem dwóch prostych, na których leżą pozostałe cztery, po dwa na każdej. Wtedy szukanych prostych jest 6.
  - d) Dokładnie trzy punkty leżą na jednej prostej i dokładnie dwa na innej. Wtedy jest 8 szukanych prostych.
  - e) Każde trzy z punktów nie są współliniowe. Wtedy szukanych prostych jest maksymalna liczba, czyli 10.
6. Niech  $AB < 1$ ,  $A', B'$  będą spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków  $A, B$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $AA'B$  i  $ABB'$  wynika teza.
7. Ponieważ zmiana pozycji o jedną minutę dla wskazówki godzinowej oznacza upływ 12 minut, to wskazówka godzinowa wskazuje dokładną minutę tylko o pełnej godzinie  $y$  i  $12x$  minut ( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Wtedy wskazówka godzinowa będzie pokazywać  $5y + x$  minutę. Zatem podczas pierwszej obserwacji mamy  $5y + x + 6 = 12x$ , czyli  $5y + 6 = 11x$ . Uwzględniając ograniczenia na wartości  $x$  i  $y$  otrzymujemy  $x = y = 1$ . Zatem pierwsza obserwacja została dokonana o godzinie 1:12.  
Dla drugiej obserwacji mamy analogicznie  $5y + 7 = 11x$ . Daje to  $y = 3$ ,  $x = 2$ , zatem była wtedy godzina 3:24. Między obserwacjami minęły 2 godziny i 12 minut.
8. Jeżeli  $x$  jest liczbą naturalną taką, że liczby  $x/3$  i  $3x$  są dwucyfrowe, to  $30 \leq x \leq 33$  oraz  $x$  jest liczbą podzielną przez 3. Jest jasne, że tylko liczby 30 i 33 spełniają warunki zadania.
9. Krawczyk mógł nie zabić żadnej muchy, wtedy tylko Jacek mówił prawdę. W przeciwnym przypadku Basia mówiła prawdę, zatem pozostali kłamali. Jest to możliwe tylko w przypadku, gdy Krawczyk zabił 7 much. Ostatecznie Krawczyk zabił 0 lub 7 much.
10. Dwójek jest 4, 5, 6 lub 7. Z podzielności przez 3 wynika, że dwójek jest 6, czyli jedna trójka. Tylko ustawienie trójki na przedostatniej pozycji gwarantuje podzielność przez 4. Wilk powinien wpisać liczbę 2222232.