POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV– rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Baron Munchausen postanowił mówić prawdę w poniedziałek, środę i piątek, a kłamać w pozostałe dni tygodnia. Pewnego dnia powiedział "Jutro będę mówił prawdę". Jaki to był dzień?

2. W koszu było 70 jabłek. Przełożono je do trzech zielonych toreb. Jabłka z każdej zielonej torby przełożono do czterech czerwonych toreb, przy czym dla różnych zielonych toreb były to inne cztery czerwone torby. Następnie z każdej czerwonej torby przełożono jabłka do trzech niebieskich toreb, przy czym dla różnych czerwonych toreb były to inne trzy niebieskie torby. Okazało się, że nie było pustej niebieskiej torby. Pokaż, że w pewnej niebieskiej torbie było dokładnie jedno jabłko.

3. Na stole stoi ciasto w kształcie prostopadłościanu. Czy przy pomocy jedynie trzech prostych cięć można podzielić je na 8 kawałków równej objętości?

4. Adam, Basia, Jacek i Antek chodzili z taką samą i stałą prędkością. Adam wyruszył z miejscowości Start do miejscowości Meta. Godzinę później z Mety wyruszyli Basia i Jacek. Gdy mijali się z Adamem, ze Startu wyruszył Antek. Równocześnie doszło do sprzeczki Basi z Jackiem, w wyniku czego Basia zatrzymała się, a Jacek kontynuował podróż biegnąc z podwojoną prędkością. Gdy Adam docierał do Mety, Jacek spotkał Antka, który przekonał go, aby przeprosił Basię. Jacek wrócił do Basi idąc. Ile czasu minęło od rozstania Basi i Jacka do ich ponownego spotkania?

5. Określ, czy istnieje taka liczba naturalna n, że przestawiając cyfry w zapisie dziesiętnym liczby 4^n można otrzymać liczbę podzielną przez 3.

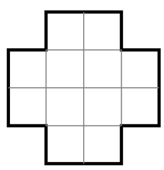
6. Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 7 i 12, a jego obwód jest liczbą całkowitą podzielną przez 5. Ile może wynosić długość trzeciego boku?

7. W pewnym trójkącie prostokątnym jeden z kątów jest trzy razy większy od drugiego. Jaką miarę ma najmniejszy spośród kątów tego trójkata?

8. Pewna liczba kończąca się na 4 ma ciekawą własność. Otóż kiedy przeniesiemy tę czwórkę na początek, to wartość tej liczby zwiększy się dokładnie czterokrotnie. Podaj najmniejszą taką liczbę.

9. Ile stopni ma kąt, który tworzą wskazówki zegara o 18.18?

10. Na ile sposobów można kostkami domina 2×1 przykryć figurę z obrazka (każda kostka przykrywa dokładnie dwa pola i kostki nie nakładają się)?



PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeśli Baron wypowiedziałby to zdanie w dniu, w którym mówił prawdę, to kolejny dzień też musiałby być dniem prawdomówności. Jeśli zaś wypowiedziałby to zdanie w dniu, w którym kłamał, to kolejny dzień też musiałby być dniem mówienia nieprawdy. Jednak zgodnie z harmonogramem mówienia prawdy i nieprawdy, w tygodniu nie występują dwa kolejne dni, kiedy Baron mówi prawdę, a jedynym dniem mówienia nieprawdy, po którym znów jest dzień mówienia nieprawdy to sobota. Zatem musiała to być sobota.

2. Niebieskich toreb było 36. Gdyby w każdej z nich były co najmniej dwa jabłka, to wszystkich jabłek musiałoby być co najmniej 72. Zatem w przynajmniej jednej niebieskiej torbie liczba jabłek była mniejsza niż dwa. Jednak wiemy, że żadna z toreb nie była pusta, a to oznacza, że musiało być w niej dokładnie jedno jabłko.

3. Tak. Wystarczy wykonać cięcia wzdłuż trzech płaszczyzn symetrii tego prostopadłościanu.

4. Niech d oznacza odległość, jaką każdy z nich przechodził w ciągu godziny, a x odległość od Mety do miejsca P zatrzymania się Basi. Analizując drogę przebytą przez Adama otrzymujemy, że odległość między Startem a P wynosi $d+x$, zaś między P a Metą wynosi x. W czasie, gdy Adam pokonywał dystans od P do Mety, Jacek przebiegł więc odległość $2x$, a Antek przeszedł trasę x, zatem odległość między Startem a P wynosi $3x$. Stąd mamy $d+x=3x$, czyli $d=2x$. Ostatecznie otrzymujemy, że Jacek przebiegł odległość d, co zajęło mu pół godziny, a wracał ten sam dystans idąc. Rozstanie Basi i Jacka trwało półtorej godziny.

5. Nie ma takiej liczby, bo dla żadnej liczby n liczba 4^n nie dzieli się przez 3. Zgodnie z cechą podzielności przez 3, tego faktu nie zmieni przestawianie cyfr.

6. Oznaczmy długość trzeciego boku przez n. Z warunku trójkąta otrzymujemy $n < 19$ oraz $n > 5$, czyli $6 \leqslant n \leqslant 18$. W takim razie obwód trójkąta wynosi między 25 a 37, a skoro jest podzielny przez 5, to otrzymujemy trzy rozwiązania: $n = 6$, $n = 11$ lub $n = 16$.

7. Musimy rozważyć dwa przypadki: kąt prosty jest trzy razy większy od jednego z kątów ostrych lub jeden z kątów ostrych jest trzy razy większy od drugiego. Otrzymujemy dwa możliwe rozwiązania: $\alpha = 30^\circ$ lub $\alpha = 90^\circ/4 = 22{,}5^\circ$.

8. Oznaczmy szukaną liczbę przez x. Jest ona postaci ...4, gdzie ... symbolizuje nieznany początek liczby x. Liczba $4x$ ma zatem postać ...6 (najlepiej widać to przy mnożeniu pisemnym). W takim razie x musi być postaci ...64, ale wtedy liczba $4x$ kończy się na ...56. To z kolei mówi, że x jest postaci ...564, itd. Rozumowanie prowadzimy tak długo, aż w liczbie $4x$ pojawi się na początku cyfra 4. Odpowiedź: $x = 10256$.

9. O godzinie 18.00 wskazówka minutowa jest na godzinie 12 i przez 18 minut obróci się o kąt $18 \cdot 6^\circ = 108^\circ$, tzn. będzie tworzyła kąt $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ z kierunkiem godziny 18. Natomiast wskazówka godzinowa o godzinie 18.00 jest na godzinie 18 i przez 18 minut obróci się o kąt $18 \cdot 0{,}5^\circ = 9^\circ$. Zatem kąt między wskazówkami będzie wynosił $72^\circ + 9^\circ = 81^\circ$ (lub 279°).

10. Jeśli dwa górne pola przykryjemy jedną kostką domina i tak samo uczynimy z dwoma dolnymi polami, to pozostałe osiem pól możemy pokryć na 5 różnych sposobów. Jeśli dwa górne pola pokryjemy jedną kostką domina, a dwa dolne nie, to taka sytuacja da się już tylko na jeden sposób uzupełnić do pełnego pokrycia. Podobnie, jeśli dwa dolne pola pokryjemy jedną kostką domina, a dwóch górnych nie, to też otrzymamy tylko jedną możliwość. I na koniec, jeśli ani dwóch górnych pól nie pokryjemy jedną kostką, ani dwóch dolnych pól, to też taką sytuację można tylko na jeden sposób uzupełnić do całego pokrycia. Ostatecznie, jest $5 + 1 + 1 + 1 = 8$ sposobów pokrycia tej figury.