UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV– rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Wiadomo, że $a + b = 2$, $b + c = 3$, $c + d = 4$, $d + e = 5$ oraz że suma wszystkich liczb a, b, c, d, e jest równa 0. Ile wynosi liczba e?

2. Za siedmioma górami, za siedmioma lasami, w Siódmym Królestwie jest 77 miast. Król rozkazał zbudować drogi między tymi miastami tak, aby z każdego miasta wychodziło dokładnie 7 dróg. Czy poddanym uda się wypełnić rozkaz króla?

3. Czy istnieje ostrosłup o liczbie krawędzi o 2018 większej od liczby ścian?

4. Z Kaczogrodu do Kurkowa wyjechał samochód dostawczy, jadąc ze średnią prędkością 60 km/h. Trzy kwadranse później wyjechał za nim samochód osobowy ze średnią prędkością o 25% większą niż dostawczy i dogonił go w połowie drogi między Kaczogrodem a Kurkowem. Jak daleko jest z Kaczogrodu do Kurkowa.

5. Wśród siedmiu monet jest 5 prawdziwych o wadze 50 g każda i dwie fałszywe o wadze 49 g. Czy za pomocą dwóch ważeń na wadze szalkowej (bez odważników) można znaleźć trzy prawdziwe monety?

6. Na papierze w kratkę narysowano koło o promieniu 5 boków kratki i środku w wierzchołku kratki. Ile kwadratów wymiaru 5 kratek $\times$ 5 kratek, o bokach leżących na liniach i wierzchołkach leżących w wierzchołkach kratek, zawiera się w tym kole?

7. Na zewnątrz trójkąta równobocznego ABC dorysowano trójkąt prostokątny ADB, w którym jeden z kątów jest trzy razy większy od innego. Podaj miarę kąta CAD czworokąta $ADBC$. Rozważ wszystkie przypadki.

8. Uczestników konkursu matematycznego podzielono na dwie równoliczne drużyny. W pierwszej drużynie znalazło się 80% wszystkich chłopców, a 70% dziewcząt znalazła się w drugiej drużynie. Jaki procent pierwszej drużyny stanowią dziewczęta?

9. Uzasadnij, że liczba 33...3 (n trójek) jest podzielna przez 33 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest parzysta.

10. Dany jest trójkąt równoboczny T o boku długości 1 oraz trójkąt S (niekoniecznie równoboczny), którego każdy bok ma długość większą niż 1. Czy pole trójkąta S jest na pewno większe od pola trójkąta T?

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że $0 = a + (b + c) + (d + e) = a + 8$, a więc $a = -8$ i dalej $b = 10$, $c = -7$, $d = 11$, $e = -6$.

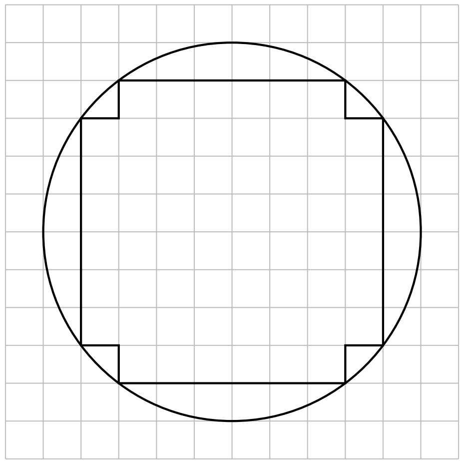
2. Nie. Gdyby było to możliwe, to dróg byłoby $\frac{77 \cdot 7}{2}$.

3. Taki ostrosłup istnieje. Jeżeli podstawą jest n-kąt, to liczba ścian wynosi $n+1$, a krawędzi $2n$, zatem potrzebna jest równość $2n = n + 1 + 2018$. Ta równość zachodzi dla $n = 2019$.

4. Samochód osobowy jechał z prędkością 75 km/h, a więc o 15 km/h większą niż dostawczy. Gdy ruszał, odległość między samochodami wynosiła $3/4 \cdot 60 = 45$ km, a więc zniwelował ją w 3 godziny pokonując jednocześnie połowę trasy, czyli $3 \cdot 75 = 225$ km. Zatem cała trasa ma 450 km.

5. Tak. Oznaczmy monety m_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$. Kładąc zestawy (x, y, z) na szalkach oznaczać będziemy znakami $<, >, =$ wyniki ważenia. Jeżeli $(m_1, m_2, m_3) < (m_4, m_5, m_6)$, to monety m_4, m_5, m_6 są prawdziwe. Jeśli $(m_1, m_2, m_3) > (m_4, m_5, m_6)$, to monety m_1, m_2, m_3 są prawdziwe. Załóżmy, że $(m_1, m_2, m_3) = (m_4, m_5, m_6)$. Porównujemy m_1 i m_2. Jeżeli są równe, to monety m_1, m_2, m_7 są prawdziwe. Jeśli moneta m_1 jest cięższa, to monety m_1, m_3, m_7 są prawdziwe, a jeżeli lżejsza, to prawdziwymi są monety m_2, m_3, m_7.

6. Jest 12 takich kwadratów: $12 = 2 + 2 \cdot 4 + 2$. Zakreślenie figury obok ułatwi liczenie. Oczywiście należy policzyć (i uzasadnić dlaczego!) ile punktów kratowych znajduje się na okręgu.



7. Trójkąt ADB może mieć kąty: $(30°, 60°, 90°)$ lub $(22,5°, 67,5°, 90°)$ – do kąta CAB można więc dokleić kąt trójkąta prostokątnego na jeden z pięciu sposobów – stąd możliwe wyniki to $\measuredangle CAD = 82,5°$, $\measuredangle CAD = 90°$, $\measuredangle CAD = 120°$, $\measuredangle CAD = 127,5°$, $\measuredangle CAD = 150°$.

8. 36%. Jeśli d, to liczb dziewcząt, a c liczba chłopców, to wiemy, że $80\%c + 30\%d = 20\%c + 70\%d$, czyli $3c = 2d$. Mamy więc $30\%d/(80\%c + 30\%d) = 45c/125c = 36/100$.

9. Gdy liczba trójek jest parzysta, to oczywiście $333....33 = 33 \cdot 101...01$, gdzie występuje $n/2$ jedynek. Trzeba jeszcze uzasadnić, że taka liczba nie jest podzielna przez 33, gdy liczba trójek jest nieparzysta. ale wtedy taka liczba jest o 3 większa od 333...30, czyli liczby podzielnej przez 33. Wobec tego przy dzieleniu przez 33 zostaje 3 reszty i liczba nie jest podzielna.

10. Nie. Np. gdy trójkąt S ma boki o długościach 2, $\frac{\sqrt{65}}{8}$, $\frac{\sqrt{65}}{8}$. Wówczas jego pole wynosi $\frac{1}{8}$, a pole T wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

    Dopuszczalne jest również rozumowanie, w którym pokaże się (bez podania konkretnych wymiarów) trójkąt, np. równoramienny o podstawie dłuższej niż dwa i bardzo małej wysokości.