POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

FINAŁ

1. Jacek rzucał kostką sześcienną, w której dwie ściany były zielone, dwie czerwone i dwie niebieskie. Po pierwszym rzucie Jacek widział dokładnie trzy sąsiednie ściany: dwie zielone ściany i jedną czerwoną, a po drugim również widział dokładnie trzy sąsiednie ściany: dwie niebieskie i jedną zieloną. Jaki był kolor ściany leżącej naprzeciw ściany zielonej, którą widział Jacek w drugim rzucie ?

2. Karol wypisał po kolei wszystkie liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Po wszystkim otoczył kółeczkiem każdą z cyfr 3 oraz 5. Ile cyfr Karol otoczył kółeczkiem?

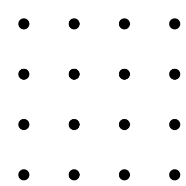
3. Jedna z wysokości trójkąta równoramiennego dzieli jego pole w stosunku $1 : 2$. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że podstawa ma długość 12 cm. Rozważ wszystkie przypadki.

4. W układzie współrzędnych zaznaczono pięć punktów A, B, C, D, E o współrzędnych będących liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że można tak wybrać dwa z tych punktów, żeby środek łączącego je odcinka też miał współrzędne całkowite.

5. W pewnym lesie było 230 zwierząt trzech gatunków: żubrów, dzików i zajęcy. Każdy zając ważył 2 kg, dzik 100 kg, a żubr 500 kg. Wszystkie zwierzęta razem ważyły 11 ton. Ile było zwierząt poszczególnych gatunków?

6. Iloczyn cyfr pewnej liczby całkowitej dodatniej wynosi 4^{2019}. Pokaż, że suma cyfr tej liczby wynosi co najmniej 8076.

7. W czterech rzędach i czterech kolumnach odległych o 1 znajduje się 16 punktów (jak na rysunku obok). Ile jest trójkątów prostokątnych równoramiennych o wierzchołkach w tych punktach?



8. Za pomocą trzech różnych niezerowych cyfr Antek utworzył wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Jedynie część tych liczb była podzielna przez 6 i te Antek dodał otrzymując liczbę 3108. Ile wynosi suma pozostałych liczb utworzonych przez Antka?

9. Każdy z czwórki przyjaciół: Adam, Antek, Basia i Jacek albo zawsze mówi prawdę albo zawsze kłamie. Jeśli Basia mówi, że Jacek kłamie, a Jacek mówi, że Adam kłamie, zaś Adam mówi, że Jacek kłamie i Antek mówi, że Basia kłamie, to ilu z tych przyjaciół kłamie?

10. W trójkącie ABC długości boków wynoszą $|AB| = 11$, $|BC| = 7$ i $|AC| = 5$. Na bokach AB, BC i AC obrano punkty, odpowiednio K, L, M tak, że $|AK| = 8$, $|CL| = 3$ oraz $|AM| = 2$. Jaką częścią pola trójkąta ABC jest pole czworokąta $AKLM$?

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

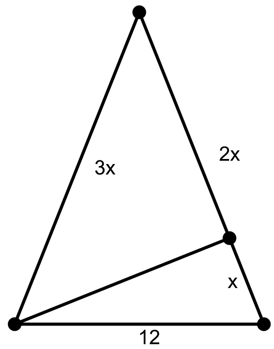
1. Pierwszy rzut pokazał, że zielone ściany mają wspólną krawędź, zatem nie są naprzeciw siebie. Ponieważ w drugim rzucie Jacek widział obie ściany niebieskie, to naprzeciw zielonej znalazła się ściana czerwona.

2. W każdej setce występuje 20 cyfr 3: 10 z nich jako cyfra dziesiątek, 10 jako cyfra jedności. Setek jest 10 więc na pozycjach dziesiątek i jedności cyfra 3 wystąpi 200 razy. Podobnie z cyfrą 5. Z kolei 100 razy cyfra 3 pojawi się jako cyfra setek. Cyfra 3 wystąpi więc 300 razy, podobnie cyfra 5. Karol otoczył kółkiem 600 cyfr.

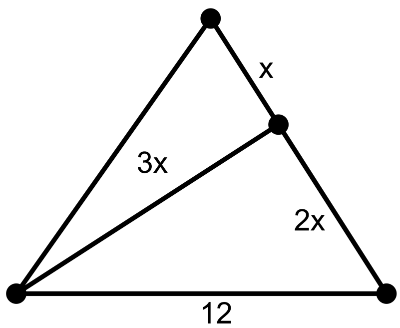
3. Oczywiście wysokością, o której mowa w zadaniu nie może być wysokość opadająca na podstawę. Musimy rozważyć dwa przypadki. Przypadek pierwszy pokazany jest na rysunku obok. Mamy

$$9x^2 - 4x^2 = 12^2 - x^2,$$

co oznacza, że $x = 2\sqrt{6}$ cm. Daje to obwód trójkąta równy $12\sqrt{6} + 12$ cm.



Przypadek drugi:



Mamy

$$9x^2 - x^2 = 12^2 - 4x^2,$$

co oznacza, że $x = 2\sqrt{3}$ cm. Daje to obwód trójkąta równy $12\sqrt{3} + 12$ cm.

4. Współrzędne środka odcinka są średnią arytmetyczną współrzędnych jego końców. Każda ze współrzędnych może być parzysta (p) lub nieparzysta (n). Mamy jedynie 4 możliwe układy parzystości liczb w parze: (n,n), (n,p), (p,n), (p,p). Musi więc istnieć taki układ, w którym znaleźć można co najmniej dwa z tych punktów. Wówczas suma obu współrzędnych tych punktów jest na pewno parzysta – więc ich średnia jest liczbą całkowitą.

5. Niech x, y, z oznacza odpowiednio liczbę zajęcy, dzików i żubrów. Mamy $x+y+z = 230$, $2x+100y+500z = 11000$. Wynika z tego, że $x = 50t$, zatem $50t + y + z = 230$ (w szczególności $t \leqslant 4$) oraz $t + y + 5z = 110$. Odejmując stronami mamy $49t - 4z = 120$, skąd wynika, że t jest liczbą podzielną przez 4. Ponieważ $t \leqslant 4$, to $t = 4$, czyli $x = 200$, $z = 19$, $y = 11$.

6. Niech w zapisie rozważanej liczby występuje j jedynek, d dwójek, c czwórek i u ósemek (inne cyfry nie występują), wtedy $1^j \cdot 2^d \cdot 4^c \cdot 8^u = 4^{2019}$, stad $d + 2c + 3u = 4038$. Suma cyfr rozważanej liczby wynosi $j + 2d + 4c + 8u = j + 2u + 2 \cdot 4038 \geqslant 8076$.

7. Jest $4 \cdot (9+4+1) = 56$ trójkątów o przyprostokątnych zawartych w rzędach i kolumnach (składniki są związane z różnymi wymiarami trójkątów), $4 \cdot 6 = 24$ trójkątów o przeciwprostokątnych zawartych w rzędach lub kolumnach oraz $4 \cdot 2 = 8$ trójkątów o przyprostokątnych długości $\sqrt{5}$. Czynnik 4 w powyższych iloczynach odpowiada czterem orientacjom przeciwprostokątnej i wierzchołka kąta prostego. Szukanych trójkątów jest 88.

8. Oznaczmy cyfry Antka przez a, b, c. Z treści zadania wynika, że $a + b + c$ jest podzielne przez 3 oraz co najwyżej dwie z nich są parzyste. Gdyby tylko jedna z tych cyfr była parzysta (np a), to jedynymi liczbami podzielnymi przez 6 byłyby bca i cba, a suma dwóch liczb trzycyfrowych nie może dać 3108. W takim razie dwie z nich byłyby parzyste (przyjmijmy a i b). W takim razie

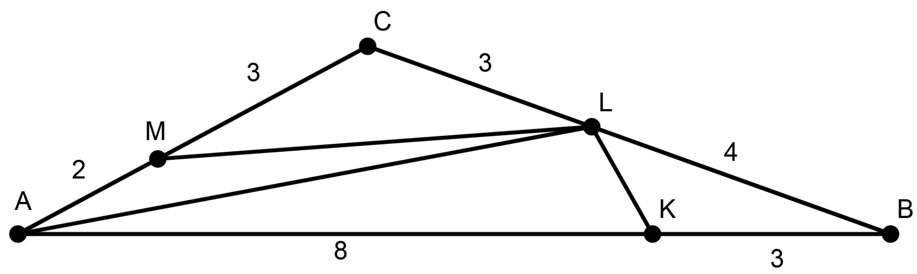
$$bca + cba + acb + cab = 3108.$$

A to daje $112a + 112b + 220c = 3108$, czyli c dzieli się przez 7. W takim razie $c = 7$. Stąd $16a + 16b + 220 = 444$, czyli $a + b = 14$. Pozostałe liczby to abc i bac, a ich suma wynosi

$$100(a + b) + 10(a + b) + 2c = 1400 + 140 + 14 = 1554.$$

9. Kłamią dwie osoby. Wystarczy rozważyć dwie możliwości: Basia mówi prawdę (wtedy kłamią Jacek i Antek) albo Basia kłamie (wtedy oprócz Basi kłamie również Adam).

10. Po przedstawieniu sytuacji na rysunku:



widzimy, że

$$P_{ALM} = \frac{2}{5} P_{ALC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} P_{ABC}.$$

$$P_{AKL} = \frac{8}{11} P_{ABL} = \frac{8}{11} \cdot \frac{4}{7} P_{ABC}.$$

Dodając te równości stronami otrzymujemy

$$P_{AKLM} = (\frac{6}{35} + \frac{32}{77}) P_{ABC} = \frac{226}{385} P_{ABC}.$$