POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

PÓŁFINAŁ

1. Na okręgu namalowano 2019 kropek. Kropki były w dwóch kolorach: zielonym i czarnym, przy czym nie wszystkie były tego samego koloru. Każda zielona kropka znajdowała się między zieloną i czarną kropką, ale żadna czarna kropka nie znajdowała się między zieloną i czarną kropką. Ile było zielonych kropek?

2. Sprawdź czy
$$\underbrace{44...4}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{99...9}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{66..6}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{66..6}_{n \text{ cyfr}}$$

3. W trójkącie ABC wysokość CD przecina bok AB w punkcie D, a dwusieczna kąta ACB w punkcie E, przy czym D jest środkiem odcinka AE. Jeden z kątów trójkąta ma miarę $100°$. Oblicz pozostałe kąty trójkąta.

4. Jacek położył na stole stos 2019-tu kartek i wykonywał następujące ruchy. W pierwszym ruchu wziął kartkę z wierzchu i włożył ją w środek stosu tak, że nad nią i pod nią znalazło się tyle samo kartek. W drugim ruchu wziął kartkę ze spodu stosu i włożył ją w taki sam sposób, jak poprzednią. Dalej wykonywał na przemian wyżej opisane ruchy. W jakim porządku, w stosunku do początkowego, będą ułożone kartki po 2019-tu ruchach?

5. Znajdź cztery liczby całkowite dodatnie takie, że pierwsza z nich jest pięć razy większa od drugiej i siedem razy większa od trzeciej, czwarta jest najmniejsza i dzieli się przez 4, a ich suma wynosi 2019.

6. W pewnym mieście urządzono wyścigi samochodowe. Trasa wyścigu biegła czterema ulicami tworzącymi czworokąt. Jacek prowadził od startu i cały wyścig jechał dokładnie środkiem ulic, które miały szerokość 4 m. Jacek zauważył, że przejeżdżał tymi ulicami kolejno 4 km, 5 km, 3 km i 6 km. Po wyścigu okazało się, że całą nawierzchnię asfaltową trzeba wymienić. Ile na to zużyto m^3 asfaltu, jeżeli grubość jego warstwy wynosiła 15 cm?

7. Mucha mieszkająca w wierzchołku sześcianu wybiera się z wizytą do przyjaciółki mieszkającej w wierzchołku tego sześcianu nie leżącym na wspólnej ścianie. Ile różnych dróg (niekoniecznie najkrótszych!) może wybrać mucha takich, aby poruszać się tylko po krawędziach, ale po każdej co najwyżej raz?

8. Wysokość trójkąta dzieli podstawę w stosunku $1 : 8$. W jakim stosunku dzieli podstawę prosta do niej prostopadła i dzieląca trójkąt na dwie figury o równych polach?

9. Ile jest liczb trzycyfrowych równych podwojonemu iloczynowi swoich cyfr?

10. Dany jest równoległobok $ABCD$. Obieramy punkt X na boku BC oraz punkt Y taki, że czworokąt $AXYD$ jest równoległobokiem. Pokaż, że pola obu wymienionych równoległoboków są równe.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Obok każdej zielonej kropki znajduje się inna zielona. Miejsca dwóch kolejnych zielonych oznaczmy A_1, A_2, a pozostałe kolejne miejsca oznaczmy $A_3, A_4, \ldots, A_{2019}$. Ponieważ A_1 i A_2 są zielone, to A_3 jest czarne. Z czarną kropką sąsiadują dwie tego samego koloru, zatem A_4 jest zielone. Rozumując tak dalej dochodzimy do wniosku, że kropki są ułożone w ciąg segmentów ”dwie zielone, jedna czarna”. Mamy stąd, że zielonych kropek jest dwie trzecie wszystkich czyli 1346.

2. Tak. Wystarczy obustronnie podzielić przez 36.

3. Oznaczmy $\alpha = \angle ACD = \angle ECD$, wtedy $\angle ACB = 4\alpha$, $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ - 3\alpha$. Wynika z tego, że $4\alpha = 100^\circ$, zatem pozostałe kąty trójkąta to 65° i 15°.

4. Można zauważyć, że każda kartka (oprócz pierwszej) zdjęta z wierzchu stosu znajdzie się bezpośrednio pod kartką włożoną w środek ze spodu w poprzednim ruchu. Analogicznie, każda kartka wzięta ze spodu znajdzie się bezpośrednio nad kartką zdjętą z wierzchu stosu w poprzednim ruchu. Stąd łatwy wniosek, że po wykonaniu wszystkich ruchów porządek kartek będzie odwrotny.

5. Łatwo wywnioskować, że pierwsze liczby są postaci $35x$, $7x$, $5x$ dla pewnej liczby naturalnej x. Oznaczając najmniejszą liczbę przez n mamy $47x+n = 2019$ oraz $n \leqslant 5x$. W takim razie $47x < 2019$ oraz $52x \geqslant 2019$, co daje $39 \leqslant x \leqslant 42$. Ponieważ $2019 = 47 \cdot 42 + 45 = 47 \cdot 41 + 92 = 47 \cdot 39 + 186$, to warunki zadania są spełnione tylko dla $x = 41$ i $n = 92$. Szukanymi liczbami są $35 \cdot 41 = \mathbf{1435}$, $7 \cdot 41 = \mathbf{287}$, $5 \cdot 41 = \mathbf{205}$, $\mathbf{92}$.

6. Powierzchnia wszystkich ulic to cztery trapezy o wysokości 4m i odległościach między środkami ramion równych odcinkom przejechanym przez Jacka. Zatem pole powierzchni ulic wynosi $4 \text{ m} \cdot (4 + 5 + 3 + 6) \text{ km} = 72000 \text{ m}^2$. Zużyto $72000 \cdot 0,15 = 10800 \text{ m}^3$ asfaltu.

7. Pierwszą krawędź może wybrać na trzy sposoby, drugą na dwa. Następny wybór kończy drogę lub pozostawia muchę na ścianie S zawierającej dwie pierwsze krawędzie drogi. Drugi wybór daje dwie możliwości dodarcia do ściany równoległej do S w wierzchołku różnym od docelowego, a następnie dwa sposoby dotarcia do celu. Wynika stąd, że rozważanych dróg jest $3 \cdot 2 \cdot (1 + 2 \cdot 2) = 30$.

8. Wysokość h dzieli podstawę na odcinki a i $8a$, prosta prostopadła do podstawy odcina z niej odcinek x zawarty w $8a$, a jej część wspólna z trójkątem ma długość H. Warunki zadania dają $2xH = 9ah$, a z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy $\frac{x}{8a} = \frac{H}{h}$. W takim razie $x = 6a$. Oznacza to, że szukany stosunek wynosi $\frac{6a}{3a} = 2$.

9. Nie ma liczb spełniających warunki zadania. Niech $M = 100a + 10b + c$ będzie taką liczbą, wtedy jest ona równa $2abc$, zatem c jest liczbą parzystą i $c = 2x$ gdzie $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Mamy $50a + 5b + x = 2abx$, stąd wynika, że b oraz x są liczbami tej samej parzystości oraz $2a(bx - 25) = 5b + x$. Ponieważ $bx > 25$, to $b > 6$. Sprawdzamy, że dla b równego $7, 8, 9$ żadna liczba x z zakresu $\{1, 2, 3, 4\}$ nie spełnia powyższego warunku.

10. Trójkąty AXD i ABD są połowami wymienionych równoległoboków, więc wystarczy pokazać równość ich pól. Jest to oczywiste, bo trójkąty te mają wspólną podstawę i równe wysokości.